Capítulo 9

Memorias Asociativas $\alpha\beta$

En este capítulo se propone un nuevo modelo de memorias asociativas.

Las herramientas matemáticas del nuevo modelo incluyen dos operaciones binarias inventadas ex profeso, cuyos operadores fueron bautizados arbitrariamente con las dos primeras grafías del alfabeto griego: α y β.

Las nuevas memorias asociativas $\alpha\beta$ son de dos tipos y cada uno de ellos puede operar en dos modos diferentes. La operación α es útil en la fase de aprendizaje, mientras que la operación β da sustento a la fase de recuperación de patrones.

Las propiedades algebraicas de las operaciones α y β permiten que las nuevas memorias $\alpha\beta$ exhiban características similares a las que son inherentes a las memorias asociativas morfológicas binarias, en cuanto a capacidades de aprendizaje y almacenamiento, tipos y cantidades de ruido a que son robustas, y condiciones suficientes para respuesta perfecta; adicionalmente, es preciso enfatizar que la densidad aritmética de las nuevas memorias asociativas es menor que la correspondiente a las memorias asociativas morfológicas.

La razón para tomar como referencia a las memorias asociativas morfológicas para la creación de las memorias $\alpha\beta$, consiste en que los autores de las primeras han mostrado que estas memorias superan en varios aspectos a los modelos conocidos de memorias asociativas hasta los inicios del tercer milenio.

En este capítulo se demuestra de manera teórica que las nuevas memorias, en ambos modos de operación, pueden soportar cantidades impresionantes de ruido, aditivo o sustractivo, para entregar salidas perfectas en la fase de recuperación de patrones.

9.1. Herramientas Matemáticas

Esta sección consta de tres partes. En la primera se presentan las dos operaciones binarias originales α y β, las cuales sirven de base para construir cuatro operaciones matriciales, que son presentadas en la segunda parte; finalmente, en la tercera parte se enfatiza el papel que juegan las relaciones de orden en este trabajo, al definir los diferentes tipos de ruido que pueden alterar un patrón binario dado.

9.1.1. Operaciones Binarias α y β

Los conjuntos A y B se definen así:

$$A = \{0,1\} \quad \text{y} \quad B = \{0,1,2\}$$

La operación binaria $\alpha : A \times A \to B$ está definida en la siguiente tabla:

x	y	$\alpha(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	2
1	1	1

La operación binaria α exhibe algunas propiedades algebraicas, expuestas a continuación, donde $\bigvee$ es el operador *máximo* y $\bigwedge$ es el operador *mínimo*:

$\alpha(x,x) = 1$
$(x \leq y) \leftrightarrow \alpha(x,y) \leq \alpha(y,x)$
$(x \leq y) \leftrightarrow [\alpha(x,z) \leq \alpha(y,z)]$
$(x \leq y) \leftrightarrow [\alpha(z,x) \geq \alpha(z,y)]$
$\alpha[(x \bigvee y), z] = \alpha(x,z) \bigvee \alpha(y,z)$
$\alpha[(x \bigwedge y), z] = \alpha(x,z) \bigwedge \alpha(y,z)$

La operación binaria $\beta : B \times A \to A$ está definida en la siguiente tabla:

x	y	$\beta(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1
2	0	1
2	1	1

Propiedades algebraicas de la operación binaria β:

$\beta(1,x) = x$
$\beta(x,x) = x \ \ \forall x \in A$
$(x \leq y) \to [\beta(x,z) \leq \beta(y,z)]$
$(x \leq y) \to [\beta(z,x) \leq \beta(z,y)]$
$\beta\left[(x \bigvee y), z\right] = \beta(x,z) \bigvee \beta(y,z)$
$\beta\left[(x \bigwedge y), z\right] = \beta(x,z) \bigwedge \beta(y,z)$
$\beta\left[x, (y \bigvee z)\right] = \beta(x,y) \bigvee \beta(x,z)$
$\beta\left[x, (y \bigwedge z)\right] = \beta(x,y) \bigwedge \beta(x,z)$

Propiedades de la aplicación combinada de ambas operaciones α y β:

$\beta\left[\alpha(x,y), y\right] = x$
$\beta\left[\alpha(x,y), x\right] = x$
$\beta\left[\alpha(x,x), y\right] = y$

Lo anterior significa que β es la inversa de α por la derecha y por la izquierda.

Los conjuntos A y B, las operaciones α y β junto con los operadores $\bigwedge$ (mínimo) y $\bigvee$ (máximo) usuales, conforman el sistema algebraico $(A, B, \alpha, \beta, \bigwedge, \bigvee)$ en el que están inmersas las nuevas memorias asociativas $\alpha\beta$.

9.1.2. Operaciones Matriciales $\Cup_\alpha$, $\Cap_\alpha$, $\Cup_\beta$ y $\Cap_\beta$

Se definen las siguientes cuatro operaciones entre matrices:

1. Operación αmax: $P_{m\times r} \Cup_\alpha Q_{r\times n} = \left[f_{ij}^\alpha\right]_{m\times n}$, donde

$$f_{ij}^\alpha = \bigvee_{k=1}^{r} \alpha(p_{ik}, q_{kj})$$

2. Operación βmax: $P_{m\times r} \uplus_\beta Q_{r\times n} = \left[f_{ij}^\beta\right]_{m\times n}$, donde

$$f_{ij}^\beta = \bigvee_{k=1}^{r} \beta(p_{ik}, q_{kj})$$

3. Operación αmin: $P_{m\times r} \Cap_\alpha Q_{r\times n} = \left[h_{ij}^\alpha\right]_{m\times n}$, donde

$$h_{ij}^\alpha = \bigwedge_{k=1}^{r} \alpha(p_{ik}, q_{kj})$$

4. Operación βmin: $P_{m\times r} \Cap_\beta Q_{r\times n} = \left[h_{ij}^\beta\right]_{m\times n}$, donde

$$h_{ij}^\beta = \bigwedge_{k=1}^{r} \beta(p_{ik}, q_{kj})$$

k es un entero positivo que puede tomar valores entre 1 y r inclusive.

Obsérvese la *dualidad* entre los pares de operaciones $\uplus_\alpha$ y $\Cap_\alpha$ por un lado, y entre $\uplus_\beta$ y $\Cap_\beta$ por el otro.

Restricciones:

- Ninguna de las cuatro operaciones está definida si $\exists j, k$ tales que $q_{kj} = 2$.
- Las operaciones $\uplus_\alpha$ y $\Cap_\alpha$ no están definidas si $\exists i, j, k$ tales que $p_{ik} = 2$ o $q_{kj} = 2$.

Estas restricciones aparentan ser causa de potenciales problemas que podrían aparecer al usar las operaciones anteriores; sin embargo, las nuevas memorias asociativas están diseñadas de modo que nunca ocurra algún caso prohibido.

Lema 1. Sean $\mathbf{x} \in A^n$, $\mathbf{y} \in A^m$; entonces $\mathbf{y} \uplus_\alpha \mathbf{x}^t$ es una matriz de dimensiones $m \times n$, y además se cumple que: $\mathbf{y} \uplus_\alpha \mathbf{x}^t = \mathbf{y} \Cap_\alpha \mathbf{x}^t$.

El símbolo $\boxtimes$ representará a las dos operaciones $\uplus_\alpha$ y $\Cap_\alpha$ cuando se opere un vector columna de dimensión m con un vector fila de dimensión n:

$$\mathbf{y} \uplus_\alpha \mathbf{x}^t = \mathbf{y} \boxtimes \mathbf{x}^t = \mathbf{y} \Cap_\alpha \mathbf{x}^t$$

La ij-ésima componente de la matriz $\mathbf{y} \boxtimes \mathbf{x}^t$ está dada por:

$$\left[\mathbf{y} \boxtimes \mathbf{x}^t\right]_{ij} = \alpha(y_i, x_j)$$

Es decir, la ij-ésima componente de la matriz $\mathbf{y}^{\mu} \boxtimes (\mathbf{x}^{\mu})^t$ se expresa de la siguiente manera:

$$\left[\mathbf{y}^{\mu} \boxtimes (\mathbf{x}^{\mu})^t\right]_{ij} = \alpha(y_i^{\mu}, x_j^{\mu})$$

Lema 2. Sean $\mathbf{x} \in A^n$ y $\mathbf{P}$ una matriz de dimensiones $m \times n$. La operación $\mathbf{P}_{m\times n} \uplus_\beta \mathbf{x}$ da como resultado un vector columna de dimensión m, cuya i-ésima componente tiene la si- guiente forma: $(\mathbf{P}_{m\times n} \uplus_\beta \mathbf{x})_i = \bigvee_{j=1}^{n} \beta(p_{ij}, x_j)$

Lema 3. Sean $\mathbf{x} \in A^n$ y $\mathbf{P}$ una matriz de dimensiones $m \times n$. La operación $\mathbf{P}_{m\times n} \Cap_\beta \mathbf{x}$ da como resultado un vector columna de dimensión m, cuya i-ésima componente tiene la si- guiente forma: $(\mathbf{P}_{m\times n} \Cap_\beta \mathbf{x})_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(p_{ij}, x_j)$

9.1.3. Relaciones de Orden y Tipos de Ruido

La relación de orden usual tiene importancia central al definir operativamente los tipos de ruido que es posible encontrar en los patrones de entrada, y en el papel que juegan los operadores $\bigvee$ y $\bigwedge$ en la generación y operación de las memorias $\alpha\beta$.

A continuación se enuncian algunos conceptos respecto de la relación de orden entre matrices, considerando a los vectores columna como casos particulares (Moore, 1968; Rosen, 1995). Las componentes de matrices y vectores serán elementos de uno de los conjuntos A o B.

El máximo de dos matrices P y Q es otra matriz M que se representa por $M = P \bigvee Q$, y cuya ij-ésima entrada se define como $m_{ij} = p_{ij} \bigvee q_{ij}$.

El mínimo de dos matrices P y Q es otra matriz N que se representa por $N = P \bigwedge Q$, y cuya ij-ésima entrada se define como $n_{ij} = p_{ij} \bigwedge q_{ij}$.

La notación $P \leq Q$ indica que la matriz P es menor o igual que la matriz Q, y esto se cumple si y sólo si $p_{ij} \leq q_{ij}, \forall i \forall j$.

$P < Q$ indica que la matriz P es estrictamente menor que la matriz Q, y esto se cumple si y sólo si $p_{ij} \leq q_{ij}$, $\forall i \forall j$ y $\exists i_0, j_0$ tales que $p_{i_0 j_0} < q_{i_0 j_0}$.

Las anteriores consideraciones tienen relevancia en el contexto de este trabajo, al considerar los diferentes tipos de ruido que pueden distorsionar un patrón de entrada dado.

Sean dos vectores columna $\mathbf{x}^1 \in A^n$ y $\mathbf{x}^2 \in A^n$; se dice que $\mathbf{x}^1$ es menor o igual a $\mathbf{x}^2$ si y sólo si cada una de las componentes del vector $\mathbf{x}^1$ es menor o igual a la correspon- diente componente en el vector $\mathbf{x}^2$. Esto se expresa así:

$$\mathbf{x}^1 \leq \mathbf{x}^2 \longleftrightarrow x_i^1 \leq x_i^2 \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Sean dos vectores columna $\mathbf{x}^1 \in A^n$ y $\mathbf{x}^2 \in A^n$; se dice que $\mathbf{x}^1$ es menor a $\mathbf{x}^2$ si y sólo si: cada una de las componentes del vector $\mathbf{x}^1$ es menor o igual a la correspondien- te componente en el vector $\mathbf{x}^2$, y existe al menos un valor $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ para el cual se cumple la desigualdad estricta. Simbólicamente, esto se expresa así:

$$\mathbf{x}^1 < \mathbf{x}^2 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_i^1 \leq x_i^2 \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \\ \text{y } \exists i_0 \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tal que } x_{i_0}^1 < x_{i_0}^2 \end{bmatrix}.$$

Para el caso de dos vectores columna $\mathbf{y}^1$ y $\mathbf{y}^2$ que pertenecen al conjunto A^m las definiciones anteriores siguen siendo válidas:

$$\mathbf{y}^1 \leq \mathbf{y}^2 \longleftrightarrow y_j^1 \leq y_j^2 \ \forall j \in \{1, 2, ..., m\}$$

$$\mathbf{y}^1 < \mathbf{y}^2 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} y_j^1 \leq y_j^2 \ \forall j \in \{1, 2, ..., m\} \\ \text{y } \exists j_0 \in \{1, 2, ..., m\} \text{ tal que } y_{j_0}^1 < y_{j_0}^2 \end{bmatrix}$$

Ahora, sea $\mathbf{x} \in A^n$ un patrón fundamental de entrada para una memoria asociativa $\alpha\beta$. El patrón $\mathbf{x}$ puede ser alterado, para dar lugar a un vector $\widetilde{\mathbf{x}}$, por tres tipos de ruido:

1. Ruido *aditivo*, si $\mathbf{x} \leq \widetilde{\mathbf{x}}$. Esto significa que todos los posibles cambios en los valores de las coordenadas de $\mathbf{x}$ para obtener $\widetilde{\mathbf{x}}$ consisten en colocar un valor 1 donde había un valor 0; es decir, la única posibilidad de cambio en las coordenadas de $\mathbf{x}$ se traduce en: $\exists\ i \in \{1, 2, ..., n\}$ para el que $x_i = 0$ y $\widetilde{x}_i = 1$, pero no existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ para el que $x_j = 1$ y $\widetilde{x}_j = 0$. Además: $\mathbf{x} \leq \widetilde{\mathbf{x}} \rightarrow x_i \leq \widetilde{x}_i$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

2. Ruido *sustractivo*, si $\mathbf{x} \geq \tilde{\mathbf{x}}$. Esto significa que todos los posibles cambios en los valores de las coordenadas de $\mathbf{x}$ para obtener $\tilde{\mathbf{x}}$ consisten en colocar un valor 0 donde había un valor 1; es decir, la única posibilidad de cambio en las coordenadas de $\mathbf{x}$ se traduce en: $\exists\ i \in \{1, 2, ..., n\}$ para el que $x_i = 1$ y $\tilde{x}_i = 0$, pero no existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ para el que $x_j = 0$ y $\tilde{x}_j = 1$. Además: $\mathbf{x} \geq \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow x_i \geq \tilde{x}_i$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

3. Ruido *combinado* o *mezclado*, si el ruido es una mezcla de aditivo con sustractivo. En este caso no es posible establecer un orden entre el patrón limpio y el ruidoso, dado que los valores podrán ser cambiados aleatoriamente, sin respetar necesariamente las reglas de los items 1 y 2.

Si el ruido es de 0 %, es claro que $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$

9.2. El modelo de las Memorias Asociativas $\alpha\beta$

En esta sección se presenta la obtención, justificación teórica y uso de las nuevas memorias asociativas basadas en las operaciones binarias originales α y β.

9.2.1. Memorias Heteroasociativas $\alpha\beta$

Se proponen dos tipos de memorias heteroasociativas $\alpha\beta$: tipo $\mathbf{V}$ y tipo $\mathbf{\Lambda}$; se desarrollarán sólo las de tipo $\mathbf{V}$ ya que las propiedades de las memorias tipo $\mathbf{\Lambda}$ se obtienen por dualidad.

Se usará el operador $\boxtimes$ el cual tiene la siguiente forma, para los índices $\mu \in \{1, 2, ..., p\}$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, y $j \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$\left[\mathbf{y}^{\mu} \boxtimes (\mathbf{x}^{\mu})^t\right]_{ij} = \alpha(y_i^{\mu}, x_j^{\mu})$$

Fase de aprendizaje.

PASO 1 Para cada $\mu = 1, 2, ..., p$, a partir de la pareja $(\mathbf{x}^{\mu}, \mathbf{y}^{\mu})$ se construye la matriz

$$\left[\mathbf{y}^{\mu} \boxtimes (\mathbf{x}^{\mu})^t\right]_{m \times n} \tag{9.1}$$

PASO 2 Se aplica el operador binario *máximo* $\bigvee$ a las matrices obtenidas en el paso 1:

$$\mathbf{V} = \bigvee_{\mu=1}^{p} \left[\mathbf{y}^{\mu} \boxtimes (\mathbf{x}^{\mu})^{t}\right] \tag{9.2}$$

La entrada ij-ésima está dada por la siguiente expresión:

$$\nu_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(y_i^{\mu}, x_j^{\mu}) \tag{9.3}$$

Es posible observar que $\nu_{ij} \in B$, $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}$, $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ ■

Fase de recuperación.

CASO 1: Patrón fundamental Se presenta un patrón $\mathbf{x}^{\omega}$, con $\omega \in \{1, 2, ..., p\}$, a la memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{V}$ y se realiza la operación $\Cap_{\beta}$:

$$\mathbf{V} \Cap_{\beta} \mathbf{x}^{\omega} \tag{9.4}$$

Dado que las dimensiones de la matriz $\mathbf{V}$ son $m \times n$ y $\mathbf{x}^{\omega}$ es un vector columna de dimensión n, el resultado de la operación anterior debe ser un vector columna de dimensión m, cuya i-ésima componente es:

$$(\mathbf{V} \Cap_{\beta} \mathbf{x}^{\omega})_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, x_j^{\omega}) \tag{9.5}$$

$$(\mathbf{V} \Cap_{\beta} \mathbf{x}^{\omega})_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta\left\{\left[\bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(y_i^{\mu}, x_j^{\mu})\right], x_j^{\omega}\right\} \tag{9.6}$$

CASO 2: Patrón alterado Se presenta un patrón binario $\tilde{\mathbf{x}}$ (patrón alterado de algún patrón fundamental $\mathbf{x}^{\omega}$) que es un vector columna de dimensión n, a la memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{V}$ y se realiza la operación $\Cap_{\beta}$:

$$\mathbf{V} \Cap_{\beta} \tilde{\mathbf{x}} \tag{9.7}$$

El resultado de la operación anterior es un vector columna de dimensión m, cuya i-ésima componente se expresa de la siguiente manera:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, \widetilde{x}_j) \tag{9.8}$$

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta\left\{\left[\bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu)\right], \widetilde{x}_j\right\} \tag{9.9}$$

■

Lema 4. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \ldots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ representada por $\mathbf{V}$. Si ω es un valor arbitrario de índice tal que $\omega \in \{1, 2, \ldots, p\}$ entonces $\mathbf{V} \Cap_\beta \mathbf{x}^\omega \geq \mathbf{y}^\omega$.

Demostración.- Sea $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ arbitraria. La i-ésima componente del vector $\mathbf{V} \Cap_\beta \mathbf{x}^\omega$ se expresa así:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \mathbf{x}^\omega)_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, x_j^\omega)$$

pero

$$\nu_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu)$$

por ello:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \mathbf{x}^\omega)_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta\left\{\left[\bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu)\right], x_j^\omega\right\}$$

Por otro lado, por hipótesis $\omega \in \{1, 2, \ldots, p\}$, y esto significa que:

$$\bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu) \geq \alpha(y_i^\omega, x_j^\omega)$$

Se realiza la operación binaria β, eligiendo los dos miembros de esta desigualdad como operandos izquierdos, y x_j^ω como operando derecho en ambos casos. Dado que β es creciente por la izquierda, se tiene:

$$\beta\left\{\left[\bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu)\right], x_j^\omega\right\} \geq \beta\left[\alpha(y_i^\omega, x_j^\omega), x_j^\omega\right]$$

Al tomar el mínimo de ambos miembros respecto del índice j:

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \beta \left\{ \left[\bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(y_i^{\mu}, x_j^{\mu}) \right] . x_j^{\omega} \right\} \geq \bigwedge_{j=1}^{n} \beta \left[\alpha(y_i^{\omega} . x_j^{\omega}) . x_j^{\omega} \right]$$

Por transitividad de la desigualdad anterior:

$$(\mathbf{V} \Cap_{\beta} \mathbf{x}^{\omega})_i \geq \bigwedge_{j=1}^{n} \beta \left[\alpha(y_i^{\omega}, x_j^{\omega}), x_j^{\omega} \right]$$

Además:

$$\beta \left[\alpha(y_i^{\omega} . x_j^{\omega}) . x_j^{\omega} \right] = y_i^{\omega}$$

esto es:

$$(\mathbf{V} \Cap_{\beta} \mathbf{x}^{\omega})_i \geq \bigwedge_{j=1}^{n} y_i^{\omega}$$

Pero

$$\bigwedge_{j=1}^{n} y_i^{\omega} = y_i^{\omega}$$

porque y_i^{ω} no depende de j, es decir:

$$(\mathbf{V} \Cap_{\beta} \mathbf{x}^{\omega})_i \geq y_i^{\omega}$$

Dado que i se escogió de manera arbitraria, se puede afirmar que la expresión anterior es válida para todos los valores de i, es decir:

$$(\mathbf{V} \Cap_{\beta} \mathbf{x}^{\omega})_i \geq y_i^{\omega} \quad \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{V} \Cap_{\beta} \mathbf{x}^{\omega} \geq \mathbf{y}^{\omega} \qquad \text{Conclusión.}$$

En virtud de que el valor ω es arbitratrio dentro del conjunto de índices para los patrones del conjunto fundamental, este Lema deja en claro que la desigualdad se cumple para *todas* las parejas de patrones que son elementos del conjunto fundamental, sin imponer condición alguna.

■

Teorema 1. Sea $\{(\mathbf{x}^{\mu}, \mathbf{y}^{\mu}) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ representada por $\mathbf{V}$. Si ω es un valor de índice arbitrario tal que $\omega \in \{1, 2, ..., p\}$, y si además para cada $i \in \{1, ..., m\}$ se cumple que $\exists j = j_0 \in \{1, ..., n\}$, el cual depende de ω y de i, tal que

$\nu_{ij_0} = \alpha(y_i^\omega, x_{j_0}^\omega)$, entonces la recuperación $\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega$ es perfecta; es decir $\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$.

Demostración.- Sea $i \in \{1, 2, ..., m\}$ arbitraria. La i-ésima componente del vector $\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega$ se expresa así:

$$(\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega)_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, x_j^\omega)$$

pero al mismo tiempo, al hacer $j = j_0$, se cumple la siguiente desigualdad: $\bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, x_j^\omega) \leq \beta(\nu_{ij_0}, x_{j_0}^\omega)$, y por transitividad se llega a:

$$(\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega)_i \leq \beta(\nu_{ij_0}, x_{j_0}^\omega)$$

Además, por hipótesis $\nu_{ij_0} = \alpha(y_i^\omega, x_{j_0}^\omega)$, es decir:

$$(\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega)_i \leq \beta\left[\alpha(y_i^\omega, x_{j_0}^\omega), x_{j_0}^\omega\right]$$

Además, se tiene

$$\beta\left[\alpha(y_i^\omega, x_{j_0}^\omega), x_{j_0}^\omega\right] = y_i^\omega$$

por lo que la desigualdad anterior queda así:

$$(\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega)_i \leq y_i^\omega$$

Dado que i se escogió de manera arbitraria, se puede afirmar que la expresión anterior es válida para todos los valores de i, por lo que:

$$(\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega)_i \leq y_i^\omega \quad \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$$

La expresión anterior se traduce en la siguiente desigualdad vectorial:

$$\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega \leq \mathbf{y}^\omega$$

Pero al cumplirse la hipótesis del Lema 4, se tiene la desigualdad en el otro sentido

$$\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega \geq \mathbf{y}^\omega$$

Por lo tanto, se llega a la recuperación perfecta del patrón $\mathbf{y}^\omega$:

$$\mathbf{V} \cap_\beta \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega \qquad \text{Conclusión.}$$

■

Teorema 2 (forma equivalente matricial del Teorema 1). Si para cada asociación $(\mathbf{x}^\omega, \mathbf{y}^\omega)$ del conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ $\mathbf{V}$, se cumple que cada fila de la matriz $\mathbf{V} - \mathbf{y}^\omega \boxtimes (\mathbf{x}^\omega)^t$ contiene una entrada cero, entonces la memoria $\mathbf{V}$ recupera el conjunto de patrones de salida fundamentales en forma perfecta.

Demostración.- Dado que la tesis es igual, es suficiente encontrar un enunciado que sea lógicamente equivalente a la hipótesis del Teorema 1.

Como ω es un valor de índice arbitrario tal que $\omega \in \{1, 2, ..., p\}$, la hipótesis se puede expresar así:

$$\begin{aligned} \forall\omega &\in \{1, 2, ..., p\} \text{ y cada } i \in \{1, ..., m\}, \\ \exists j_0 &\in \{1, ..., n\} \text{ tal que } \nu_{ij_0} = \alpha(y_i^\omega, x_{j_0}^\omega) \end{aligned}$$

Pero las siguientes expresiones son válidas:

$$\alpha(y_i^\omega, x_{j_0}^\omega) = \left[\mathbf{y}^\omega \boxtimes (\mathbf{x}^\omega)^t\right]_{ij_0}$$

$$\nu_{ij_0} = [\mathbf{V}]_{ij_0}$$

por ello, la expresión:

$$\nu_{ij_0} = \alpha(y_i^\omega, x_{j_0}^\omega)$$

es equivalente a

$$[\mathbf{V}]_{ij_0} = \left[\mathbf{y}^\omega \boxtimes (\mathbf{x}^\omega)^t\right]_{ij_0}$$

que a su vez se puede transformar en

$$[\mathbf{V}]_{ij_0} - \left[\mathbf{y}^\omega \boxtimes (\mathbf{x}^\omega)^t\right]_{ij_0} = 0$$

y finalmente en la expresión

$$\left[\mathbf{V} - \mathbf{y}^\omega \boxtimes (\mathbf{x}^\omega)^t\right]_{ij_0} = 0$$

Por lo anterior podemos obtener una expresión lógicamente equivalente a la hipótesis del Teorema:

$$\begin{aligned} \forall\omega &\in \{1, 2, ..., p\} \text{ y cada } i \in \{1, ..., m\}, \\ \exists j_0 &\in \{1, ..., n\} \text{ tal que } \left[\mathbf{V} - \mathbf{y}^\omega \boxtimes (\mathbf{x}^\omega)^t\right]_{ij_0} = 0 \end{aligned}$$

La última expresión se puede enunciar del siguiente modo equivalente: para todas las asociaciones del conjunto fundamental de la memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ $\mathbf{V}$, se cumple que cada fila de la matriz $\mathbf{V} - \mathbf{y}^\omega \boxtimes (\mathbf{x}^\omega)^t$ contiene una entrada cero.

■

Ha llegado el momento de atacar un problema trascendental en el tema de las memorias asociativas: encontrar las condiciones *suficientes* para que una memoria asociativa (en este caso para la memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{V}$) recupere patrones de salida fundamentales a partir de patrones de entrada distorsionados con ruido, es decir, patrones de entrada no fundamentales. Dentro de esas condiciones suficientes debe incluirse la cantidad y los tipos de ruido a los que la memoria es inmune: aditivo o sustractivo.

Lema 5. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ representada por $\mathbf{V}$, y sea $\tilde{\mathbf{x}} \in A^n$ un patrón alterado que se presenta a la memoria $\mathbf{V}$ como entrada. Si $\exists\omega \in \{1, 2, ..., p\}$ tal que es posible obtener el patrón $\tilde{\mathbf{x}}$ alterando el patrón fundamental $\mathbf{x}^\omega$ con ruido aditivo, entonces $\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{y}^\omega$.

Demostración.- Sea $i \in \{1, 2, ..., m\}$ arbitraria. La i-ésima componente del vector $\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}}$ se expresa así:

$$\left(\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}}\right)_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, \tilde{x}_j) \tag{9.10}$$

Por otro lado, por hipótesis $\tilde{\mathbf{x}}$ es una alteración con ruido aditivo del patrón fundamental $\mathbf{x}^\omega$, y se tiene $\mathbf{x}^\omega \leq \tilde{\mathbf{x}}$; es decir: $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{x}^\omega$, lo cual implica que

$$\tilde{x}_j \geq x_j^\omega, \quad \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$$

Se realiza la operación binaria β, eligiendo los dos miembros de esta desigualdad como operandos derechos, y a la ij-ésima componente ν_{ij} de $\mathbf{V}$ como operando izquierdo en ambos casos. Dado que β es creciente por la derecha, se tiene:

$$\beta\left(\nu_{ij}, \tilde{x}_j\right) \geq \beta(\nu_{ij}, x_j^\omega) \quad \forall j \in \{1, 2, ..., n\})$$

Al tomar el mínimo de ambos miembros respecto del índice j:

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, \tilde{x}_j) \geq \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, x_j^\omega)$$

Por transitividad de la desigualdad anterior con la expresión 9.10:

$$\left(\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}}\right)_i \geq \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, x_j^\omega)$$

Pero

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, x_j^{\omega}) = (\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \mathbf{x}^{\omega})_i$$

esto es:

$$(\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i \geq (\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \mathbf{x}^{\omega})_i$$

Además, por Lema 4

$$(\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \mathbf{x}^{\omega})_i \geq y_i^{\omega}$$

y por transitividad con la expresión anterior:

$$(\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i \geq y_i^{\omega}$$

Dado que i se escogió de manera arbitraria, se puede afirmar que la expresión anterior es válida para todos los valores de i, es decir:

$$(\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i \geq y_i^{\omega} \quad \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{y}^{\omega} \qquad \text{Conclusión.}$$

■

Teorema 3. Sea $\{(\mathbf{x}^{\mu}, \mathbf{y}^{\mu}) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ representada por $\mathbf{V}$, y sea $\widetilde{\mathbf{x}} \in A^n$ un patrón alterado con ruido aditivo respecto de algún patrón fundamental $\mathbf{x}^{\omega}$ con $\omega \in \{1, 2, ..., p\}$. Si se presenta $\widetilde{\mathbf{x}}$ a la memoria $\mathbf{V}$ como entrada, y si además para cada $i \in \{1, ..., m\}$ se cumple la condición de que $\exists j = j_0 \in \{1, ..., n\}$, el cual depende de ω y de i tal que $\nu_{ij_0} \leq \alpha(y_i^{\omega}, \widetilde{x}_{j_0})$, entonces la recuperación $\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}}$ es perfecta; es decir $\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}^{\omega}$.

Demostración.- Sea $i \in \{1, 2, ..., m\}$ arbitraria. La i-ésima componente del vector $\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}}$ se expresa así:

$$(\mathbf{V} \cap\!\!\!\cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, \widetilde{x}_j)$$

pero al mismo tiempo, al hacer $j = j_0$, se cumple la desigualdad:

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, \widetilde{x}_j) \leq \beta(\nu_{ij_0}, \widetilde{x}_{j_0})$$

y por transitividad se llega a:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}})_i \leq \beta(\nu_{ij_0}, \tilde{x}_{j_0}) \tag{9.11}$$

Por otro lado, por hipótesis $\nu_{ij_0} \leq \alpha(y_i^\omega, \tilde{x}_{j_0})$; se realiza la operación binaria β, eligiendo los dos miembros de esta desigualdad como operandos izquierdos, y $\tilde{x}_{j_0}$ como operando derecho en ambos casos. Dado que β es creciente por la izquierda (propiedad $\beta 3$ de la Tabla 3.4), se tiene:

$$\beta(\nu_{ij_0}, \tilde{x}_{j_0}) \leq \beta\left[\alpha(y_i^\omega, \tilde{x}_{j_0}), \tilde{x}_{j_0}\right]$$

Por transitividad de esta desigualdad con la expresión 9.11:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}})_i \leq \beta\left[\alpha(y_i^\omega, \tilde{x}_{j_0}), \tilde{x}_{j_0}\right]$$

Además:

$$\beta\left[\alpha(y_i^\omega, \tilde{x}_{j_0}), \tilde{x}_{j_0}\right] = y_i^\omega$$

esto es:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}})_i \leq y_i^\omega$$

Dado que i se escogió de manera arbitraria, se puede afirmar que esta expresión es válida para todos los valores de i, por lo que:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}})_i \leq y_i^\omega \quad \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$$

Esta expresión se traduce en la siguiente desigualdad vectorial:

$$\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{y}^\omega$$

Por lo tanto, aplicando el Lema 5, se llega a la recuperación perfecta del patrón $\mathbf{y}^\omega$.

$$\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}^\omega \qquad \text{Conclusión.}$$

■

El Lema 5 y el Teorema 3 indican que las memorias heteroasociativas $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{V}$ tienen cierta inmunidad al ruido **aditivo**, y especifican las condiciones que deben cumplirse para que la respuesta sea perfecta en presencia de ruido aditivo.

De inmediato surge una interrogante: ¿qué pasa con el ruido sustractivo?. Las memorias $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{V}$ son sensibles a ruido sustractivo; una pequeña cantidad de ruido sustractivo puede tener efectos no deseados en la operación de este tipo de memorias, los cuales son caracterizados por el Teorema siguiente:

Teorema 4. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa $\alpha\beta$ representada por $\mathbf{V}$, y sea $\widetilde{\mathbf{x}} \in A^n$ un patrón alterado con ruido sustractivo respecto de algún patrón fundamental $\mathbf{x}^\omega$ con $\omega \in \{1, 2, ..., p\}$. Al presentar $\widetilde{\mathbf{x}}$ a la memoria $\mathbf{V}$ como entrada se cumple lo siguiente: para cada $j_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $x^\omega_{j_0}$ haya sido alterado para obtener $\widetilde{x}_{j_0}$, si $\exists i_0 \in \{1, ..., m\}$ para el que $\nu_{i_0 j_0} = 1$, entonces $(\mathbf{V} \Cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_{i_0} = 0$.

Demostración.- Sea $\widetilde{\mathbf{x}}$ una versión distorsionada con ruido sustractivo del patrón fundamental $\mathbf{x}^\omega$: es decir, $\widetilde{\mathbf{x}} \le \mathbf{x}^\omega$, lo cual implica que $\widetilde{x}_j \le x^\omega_j$ $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$. Dependiendo del porcentaje de ruido sustractivo con que se ha alterado $\mathbf{x}^\omega$, puede haber más de un valor de j, hasta el número de bits con valor 1 en $\mathbf{x}^\omega$, para los que se cumple la desigualdad estricta $\widetilde{x}_j < x^\omega_j$.

Sea $j_0 \in \{1, ..., n\}$ un índice para el que se cumple la desigualdad estricta: $\widetilde{x}_{j_0} < x^\omega_{j_0}$; es decir, debe cumplirse que $\widetilde{x}_{j_0} = 0$ y $x^\omega_{j_0} = 1$. La expresión para la componente i del vector recuperado es:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, \widetilde{x}_j)$$

Reescribamos la expresión anterior para tomar en cuenta explícitamente el valor de j_0:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i = \bigwedge \left\{ \begin{array}{c} \left[\bigwedge_{j=1}^{j_0-1} \beta(\nu_{ij}, \widetilde{x}_j)\right], \\ \left[\beta(\nu_{ij_0}, \widetilde{x}_{j_0})\right], \\ \left[\bigwedge_{j=j_0+1}^{n} \beta(\nu_{ij}, \widetilde{x}_j)\right] \end{array} \right\}$$

Es decir:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i = \bigwedge \left\{ \begin{array}{c} \left[\bigwedge_{j=1}^{j_0-1} \beta(\nu_{ij}, \widetilde{x}_j)\right], \\ \left[\beta(\nu_{ij_0}, 0)\right], \\ \left[\bigwedge_{j=j_0+1}^{n} \beta(\nu_{ij}, \widetilde{x}_j)\right] \end{array} \right\}$$

Por hipótesis, $\exists i_0 \in \{1, ..., m\}$ para el que $\nu_{i_0 j_0} = 1$. Ana- licemos este caso crítico:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}})_{i_0} = \bigwedge \left\{ \begin{array}{c} \left[\bigwedge_{j=1}^{j_0-1} \beta(\nu_{i_0 j}, \tilde{x}_j)\right], \\ \left[\beta(\nu_{i_0 j_0}, 0)\right], \\ \left[\bigwedge_{j=j_0+1}^{n} \beta(\nu_{i_0 j}, \tilde{x}_j)\right] \end{array} \right\}$$

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}})_{i_0} = \bigwedge \left\{ \begin{array}{c} \left[\bigwedge_{j=1}^{j_0-1} \beta(\nu_{i_0 j}, \tilde{x}_j)\right], \\ \left[\beta(1, 0)\right], \\ \left[\bigwedge_{j=j_0+1}^{n} \beta(\nu_{i_0 j}, \tilde{x}_j)\right] \end{array} \right\}$$

Pero $\beta(1, 0) = 0$, por lo que la expresión anterior se transforma en:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}})_{i_0} = \bigwedge \left\{ \begin{array}{c} \left[\bigwedge_{j=1}^{j_0-1} \beta(\nu_{i_0 j}, \tilde{x}_j)\right], \\ 0, \\ \left[\bigwedge_{j=j_0+1}^{n} \beta(\nu_{i_0 j}, \tilde{x}_j)\right] \end{array} \right\}$$

Por lo tanto:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \tilde{\mathbf{x}})_{i_0} = 0$$

■

Nota importante: Sin embargo, dado el j_0 del Teorema 4, si $\nu_{ij_0} \neq 1$, $\forall i \in \{1, ..., m\}$, entonces el ruido sustractivo en la componente $\tilde{x}_{j_0}$ no afecta la posible recuperación perfecta del patrón $\mathbf{y}^\omega$. Esto significa que la memorias $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{V}$ son capaces de soportar ciertas cantidades de ruido sustractivo.

Las memorias heteroasociativas $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{\Lambda}$ se desarrollan por dualidad, partiendo de los resultados obtenidos para las memorias heteroasociativas $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{V}$. Para ello, se realizan los siguientes cambios:

- Donde haya un operador $\bigvee$ colocar un $\bigwedge$
- Donde haya un operador $\bigwedge$ colocar un $\bigvee$
- Usar el operador $\Cup_\beta$ en lugar del operador $\Cap_\beta$

Mientras que las memorias heteroasociativas $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{V}$ tienen cierta inmunidad al ruido aditivo y son sensitivas a ruido sustractivo, con las memorias heteroasociativas $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{\Lambda}$ sucede precisamente lo contrario: son inmunes a cierta cantidad de ruido sustractivo, pero sensitivas a ruido aditivo.

Una pequeña cantidad de ruido aditivo puede tener efectos no deseados en la operación de este tipo de memorias $\alpha\beta$; sin embargo, las memorias $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{\Lambda}$ son capaces de soportar ciertas cantidades de ruido aditivo.

9.2.2. Memorias Autoasociativas $\alpha\beta$

Si a una memoria heteroasociativa se le impone la condición de que $\mathbf{y}^\mu = \mathbf{x}^\mu \ \forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$, entonces deja de ser heteroasociativa y ahora se le denomina memoria *autoasociativa*.

A continuación se enlistan algunas características de las memorias autoasociativas $\alpha\beta$:

1. El conjunto fundamental toma la forma $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$
2. Los patrones fundamentales de entrada y de salida son de la misma dimensión; denotémosla por n.
3. La memoria es una matriz cuadrada, para ambos tipos, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{\Lambda}$. Si $\mathbf{x}^\mu \in A^n$, entonces $\mathbf{V} = [\nu_{ij}]_{n\times n}$ y $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_{ij}]_{n\times n}$

Al igual como se hizo para las memorias heteroasociativas, se desarrollarán sólo las memorias autoasociativas $\alpha\beta$ de tipo $\mathbf{V}$, ya que las propiedades de las memorias tipo $\mathbf{\Lambda}$ se obtienen por dualidad.

Fase de aprendizaje.

PASO 1 Para cada $\mu = 1, 2, ..., p$, a partir de la pareja $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu)$ se construye la matriz

$$\left[\mathbf{x}^\mu \boxtimes (\mathbf{x}^\mu)^t\right]_{n\times n} \tag{9.12}$$

PASO 2 Se aplica el operador binario *máximo* $\bigvee$ a las matrices obtenidas en el paso 1:

$$\mathbf{V} = \bigvee_{\mu=1}^{p} \left[\mathbf{x}^\mu \boxtimes (\mathbf{x}^\mu)^t\right] \tag{9.13}$$

La entrada ij-ésima de la memoria está dada así:

$$\nu_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(x_i^\mu, x_j^\mu) \tag{9.14}$$

Se tiene que $\nu_{ij} \in B$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$

Fase de recuperación.

CASO 1: Patrón fundamental Se presenta un patrón $\mathbf{x}^\omega$, con $\omega \in \{1, 2, ..., p\}$, a la memoria autoasociativa $\alpha\beta$ tipo **V** y se realiza la operación $\Cap_\beta$:

$$\mathbf{V} \Cap_\beta \mathbf{x}^\omega \tag{9.15}$$

El resultado de la operación anterior será un vector columna de dimensión n.

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \mathbf{x}^\omega)_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, x_j^\omega) \tag{9.16}$$

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \mathbf{x}^\omega)_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta\left\{\left[\bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(x_i^\mu, x_j^\mu)\right], x_j^\omega\right\} \tag{9.17}$$

CASO 2: Patrón alterado Se presenta un patrón binario $\widetilde{\mathbf{x}}$ que es un vector columna de dimensión n, a la memoria autoasociativa $\alpha\beta$ tipo **V** y se realiza la operación $\Cap_\beta$:

$$\mathbf{V} \Cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}} \tag{9.18}$$

Al igual que en el caso 1, el resultado de la operación anterior es un vector columna de dimensión n, cuya i-ésima componente se expresa de la siguiente manera:

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta(\nu_{ij}, \widetilde{x}_j) \tag{9.19}$$

$$(\mathbf{V} \Cap_\beta \widetilde{\mathbf{x}})_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \beta\left\{\left[\bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(x_i^\mu . x_j^\mu)\right], \widetilde{x}_j\right\} \tag{9.20}$$

■

Lema 6. Una memoria autoasociativa $\alpha\beta$ tipo **V** tiene únicamente unos en su diagonal principal.

Demostración.- La ij-ésima entrada de una memoria autoasociativa $\alpha\beta$ tipo **V** está dada por

$$\nu_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(x_i^\mu . x_j^\mu)$$

Las entradas de la diagonal principal se obtienen de la expresión anterior, haciendo $i = j$:

$$\nu_{ii} = \bigvee_{\mu=1}^{p} \alpha(x_i^\mu, x_i^\mu), \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \tag{9.21}$$

Pero se tiene que

$$\alpha(x_i^\mu, x_i^\mu) = 1$$

por lo que la expresión 9.21 se transforma en:

$$\nu_{ii} = \bigvee_{\mu=1}^{p} (1) = 1, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

■

Teorema 5. Una memoria autoasociativa $\alpha\beta$ tipo **V** recupera de manera perfecta el conjunto fundamental completo; además, tiene máxima capacidad de aprendizaje.

Demostración.- Sea $\omega \in \{1, 2, ..., p\}$ arbitrario. De acuerdo con el Lema 6, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ escogida arbitrariamente

$$\nu_{ii} = 1 = \alpha(x_i^\omega, x_i^\omega)$$

Es decir, para $i \in \{1, ..., n\}$ escogida arbitrariamente, $\exists j_0 = i \in \{1, ..., n\}$ que cumple con:

$$\nu_{ij_0} = \alpha(x_i^\omega, x_{j_0}^\omega)$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 2:

$$\mathbf{V} \Cap_\beta \mathbf{x}^\omega = \mathbf{x}^\omega, \quad \forall \omega \in \{1, 2, ..., p\}$$

Esto significa que la memoria autoasociativa $\alpha\beta$ tipo **V** recupera de manera perfecta el conjunto fundamental completo.

Además, en la demostración de este Teorema, en ningún momento aparece restricción alguna sobre p, que es la cardinalidad del conjunto fundamental; esto quiere decir que el conjunto fundamental puede crecer tanto como se quiera. La consecuencia directa es que el número de patrones que puede aprender una memoria autoasociativa $\alpha\beta$ tipo **V**, con recuperación perfecta, es máximo.

■

Teorema 6. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, ..., p\}$ el conjunto fundamental de una memoria autoasociativa $\alpha\beta$ representada por **V**, y sea $\tilde{\mathbf{x}} \in A^n$ un patrón alterado con ruido aditivo respecto de algún patrón fundamental $\mathbf{x}^\omega$ con $\omega \in \{1, 2, ..., p\}$. Si se presenta $\tilde{\mathbf{x}}$ a la memoria $\mathbf{V}$ como entrada, y si además para cada $i \in \{1, ..., n\}$ se cumple la condición de que $\exists j = j_0 \in \{1, ..., n\}$, el cual depende de ω y de i tal que $\nu_{ij_0} \leq \alpha(x_i^\omega, \tilde{x}_{j_0})$, entonces la recuperación $\mathbf{V} ⋒_\beta \tilde{\mathbf{x}}$ es perfecta; es decir $\mathbf{V} ⋒_\beta \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^\omega$.

Demostración.- Por hipótesis se tiene que $\mathbf{y}^\mu = \mathbf{x}^\mu\ \forall \mu \in \{1, 2, ..., p\}$ y, por consiguiente, $m = n$. Al establecer estas dos condiciones en el Teorema 4, se obtiene el resultado: $\mathbf{V} ⋒_\beta \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^\omega$.

■

El Teorema 6 confirma que las memorias autoasociativas $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{V}$ son inmunes a cierta cantidad de ruido aditivo.

Dado un $i \in \{1, ..., n\}$ cualquiera, consideremos las relaciones que hay entre los valores de x_i^ω y las coordenadas del vector $\tilde{\mathbf{x}}$, con el fin de analizar brevemente cada uno de los casos posibles en la fase de recuperación. Según la hipótesis del Teorema 6 la recuperación del valor x_i^ω se garantiza siempre y cuando para este valor i se pueda encontrar un $j_0 \in \{1, ..., n\}$ que cumpla con la desigualdad $\nu_{ij_0} \leq \alpha(x_i^\omega, \tilde{x}_{j_0})$. Existen dos casos posibles para el valor de x_i^ω:

1. Si $x_i^\omega = 1$, es suficiente que alguna de las entradas del patrón $\tilde{\mathbf{x}}$ sea cero, para garantizar la recuperación del valor x_i^ω. Veamos: si existe $j_0 \in \{1, ..., n\}$ para el cual $\tilde{x}_{j_0} = 0$ entonces, de acuerdo con la Tabla 3.1, $\alpha(x_i^\omega, \tilde{x}_{j_0}) = \alpha(1, 0) = 2$ y esto significa que $\nu_{ij_0} \leq \alpha(x_i^\omega, \tilde{x}_{j_0})$, porque el máximo valor posible para ν_{ij_0} es precisamente 2, según la misma Tabla.

2. Este caso es más restrictivo. Si $x_i^\omega = 0$, no basta con encontrar una entrada cero en el patrón $\tilde{\mathbf{x}}$. Al hallar el valor de $j_0 \in \{1, ..., n\}$ para el cual $\tilde{x}_{j_0} = 0$, se debe pedir como condición adicional que $\nu_{ij_0} \neq 2$, porque (según Tabla 3.1) $\alpha(x_i^\omega, \tilde{x}_{j_0}) = \alpha(0, 0) = 1$ y esto significa que la desigualdad $\nu_{ij_0} \leq \alpha(x_i^\omega, \tilde{x}_{j_0})$ se da siempre y cuando $\nu_{ij_0} \neq 2$. Si se llegase a tener carencia de ceros en las coordenadas del patrón $\tilde{\mathbf{x}}$, la condición para recuperar el valor de x_i^ω, al tener $\tilde{x}_{j_0} = 1$, es más fuerte: $\nu_{ij_0} = 0$, porque $\alpha(0, 1) = 0$.

Las memorias autoasociativas $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{\Lambda}$ se desarrollan por dualidad, partiendo de los resultados obtenidos para las memorias autoasociativas $\alpha\beta$

tipo **V**: para ello, se realizan cambios similares a los que se indicaron para las memorias heteroasociativas. También, mientras que las memorias autoasociativas $\alpha\beta$ tipo **V** son inmunes a cierta cantidad de ruido aditivo pero sensibles a ruido sustractivo, con las memorias autoasociativas $\alpha\beta$ tipo **Λ** sucede lo contrario.

9.3. Densidad Aritmética

Una colección de operadores lógicos es *funcionalmente completa* si toda proposición compuesta es lógicamente equivalente a una proposición compuesta que involucre sólo a los operadores de la colección (Rosen, 1995).

Es un hecho establecido que los tres operadores lógicos de negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$) y disyunción ($\vee$) forman una colección funcionalmente completa de operadores lógicos:

$$\{\neg, \wedge, \vee\}$$

Existen colecciones funcionalmente completas que constan de dos o de un único operador. Uno de estos operadores es el que corresponde a la Tabla de verdad de la disyunción negada: la conectiva lógica *nor*, que denotaremos con el operador $\downarrow$.

Sean x y y dos variables lógicas booleanas. El operador $\downarrow$ se define de la siguiente manera:

$$x \downarrow y = \neg(x \vee y) \tag{9.22}$$

Esto significa que la colección $\{\downarrow\}$ es funcionalmente completa, como lo afirma la Proposición 1.

Proposición 1. El operador $\downarrow$ constituye, por sí mismo, una colección funcionalmente completa $\{\downarrow\}$: si x y y son variables lógicas booleanas, entonces se cumplen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \neg x &= x \downarrow x \\ x \vee y &= (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) \\ x \wedge y &= (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) \end{aligned} \tag{9.23}$$

Tanto para las memorias asociativas morfológicas como para las memorias asociativas $\alpha\beta$ se considera un conjunto fundamental de p asociaciones, donde los patrones de entrada tienen dimensión n, y los patrones de salida, dimensión m.

Al realizar el cálculo del total de operaciones requeridas para ambas fases en las memorias asociativas morfológicas, se llega a los siguientes resultados:

La fase de aprendizaje de una memoria asociativa morfológica requiere de $28mnp$ operaciones $\downarrow$ y $mn(p-1)$ operaciones de orden.

La fase de recuperación de un patrón de salida en una memoria asociativa morfológica requiere de $198mn$ operaciones $\downarrow$ y $m(n-1)$ operaciones de orden.

Al realizar el cálculo del total de operaciones requeridas para ambas fases en las memorias asociativas $\alpha\beta$, se llega a los siguientes resultados:

La fase de aprendizaje de una memoria asociativa $\alpha\beta$ requiere de $28mnp$ operaciones $\downarrow$ y $mn(p-1)$ operaciones de orden.

La fase de recuperación de un patrón de salida en una memoria asociativa $\alpha\beta$ requiere de $147mn$ operaciones $\downarrow$ y $m(n-1)$ operaciones de orden.

A diferencia de lo que sucede con las densidades aritméticas de aprendizaje, las cuales son iguales en ambos tipos de memorias asociativas, la densidad aritmética de recuperación es menor para las memorias asociativas $\alpha\beta$ que la correspondiente a las memorias morfológicas.

Resultado comparativo de la densidad aritmética: La fase de recuperación de las memorias asociativas morfológicas requiere de un 34,7% adicional en el número de operaciones lógicas $\downarrow$, respecto de lo que requieren las memorias asociativas $\alpha\beta$.

9.4. Consideraciones finales del capítulo.

Este trabajo tiene como producto un modelo de memoria asociativa que utiliza dos operadores binarios originales que, al combinarlos de ciertas maneras, dan lugar a cuatro operaciones novedosas entre matrices y vectores.

Las memorias asociativas $\alpha\beta$ tienen al menos una ventaja sobre las morfológicas: la densidad aritmética de las memorias $\alpha\beta$ es menor. Además, exhiben capacidad máxima de almacenamiento y aprendizaje: la recuperación es perfecta para todo el conjunto fundamental.

Las memorias asociativas $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{V}$ son robustas a ruido aditivo pero vulnerables ante ruido sustractivo, y las memorias asociativas $\alpha\beta$ tipo $\mathbf{\Lambda}$ son robustas a ruido sustractivo pero vulnerables ante ruido aditivo.

Las nuevas memorias carecen de problemas de convergencia (son memorias asociativas *one shot*), lo que potencialmente les permite ser más rápidas que las memorias que requieren convergencia.